

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Случайные процессы
<b>по направлению:</b>	Экономика
<b>профиль подготовки:</b>	Управление инновациями в бизнесе Физтех-школа бизнеса высоких технологий кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 52 всего, в том числе:

лекции: 26 час.

семинары: 26 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 38 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составили:

А.В. Булинский, канд. физ.-мат. наук, доцент

В.Ю. Дубинская, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 23.11.2023

## Аннотация

Теория случайных процессов является важнейшим разделом современной теории вероятностей. В рамках этой теории исследуются модели, описывающие динамику развития случайных явлений в пространстве и времени. Такого рода модели возникают во многих естественно-научных, экономических и социальных науках.

Цель курса – дать не только представление об основных классах случайных процессов (процессы с независимыми приращениями, пуассоновский, винеровский, марковский и другие), но также продемонстрировать возможности приложений изучаемого материала к задачам, возникающим в экономике, финансовой математике, оптимизации и управлении.

Семинарские занятия, сопровождающие лекции, и самостоятельная работа направлены на усвоение важнейших понятий и результатов.

Для глубокого понимания данного курса требуется основательное изучение предшествующего курса теории вероятностей.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- дать студентам основы теории случайных процессов и продемонстрировать возможность приложений изучаемого материала к задачам, возникающим в экономике, финансовой математике, оптимизации и управлении, обеспечив тем самым;
- формирование базовых знаний по теории случайных (стохастических) процессов для дальнейшего использования в разнообразных приложениях;
- овладение методами анализа случайных явлений и процессов;
- формирование математической культуры и исследовательских навыков при изучении вероятностных моделей эволюции (динамики) систем, используемых в бизнес-приложениях (в исследовании операций, макроэкономике, финансах, маркетинге).

### Задачи дисциплины

- приобретение обучающимися теоретических знаний и практических навыков, связанных с применениями теории случайных процессов, а именно;
- свободное владение базовыми понятиями, формулами и классическими схемами;
- знание основных теорем и границ их применимости;
- развитие умения строить математические модели, отражающие те или иные стороны динамики случайных явлений, и судить об адекватности моделей.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ОПК-6 Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности	ОПК-6.1 Обладает необходимыми знаниями в области информационных технологий и программных средств
	ОПК-6.2 Использует методы и программные средства для сбора, обработки и анализа данных

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- определения, основные свойства объектов изучения теории случайных процессов, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений.

уметь:

- решать задачи вычислительного и теоретического характера в области теории случайных процессов, устанавливать взаимосвязи между вводимыми понятиями, применять и доказывать основные

владеть:

- разнообразным математическим аппаратом, подбирая сочетания различных методов, для описания и анализа стохастических моделей.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Понятие случайного процесса. Примеры.	2	2		4
2	Процессы восстановления. Процессы с независимыми приращениями.	2	2		2
3	Пуассоновский процесс и его свойства.	2	2		2
4	Цепи Маркова. Однородные цепи.	2	2		4
5	Стационарное распределение цепи.	2	2		2
6	Метод Монте-Карло по марковским цепям.	2	2		2
7	Процессы рождения и гибели.	1	1		2
8	Приложения марковских цепей в теории массового обслуживания.	1	1		2
9	Гауссовские процессы.	2	2		4
10	Стационарные процессы (в узком и широком смысле).	2	2		2
11	Задачи прогноза случайного процесса.	2	2		2
12	Мартингалы и их свойства.	2	2		2
13	Винеровский процесс и его свойства.	2	2		4
14	Элементы стохастического анализа. Формула Ито и ее применение.	2	2		4
Итого часов		26	26		38
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

## 1. Понятие случайного процесса. Примеры.

Понятие случайного процесса. Примеры. Фундаментальная теорема Колмогорова о согласованных распределениях. Траектории процесса и его числовые характеристики (математическое ожидание, ковариационная функция). Условное математическое ожидание и его свойства.

## 2. Процессы восстановления. Процессы с независимыми приращениями.

Модели случайных блужданий. Процессы восстановления. Процессы с независимыми приращениями.

## 3. Пуассоновский процесс и его свойства.

Пуассоновский процесс и его свойства. Модель страхования Крамера – Лундберга.

## 4. Цепи Маркова. Однородные цепи.

Цепи Маркова. Переходные вероятности и их свойства. Однородные цепи Маркова. Некоторые задачи управления для марковских цепей, связанные с оптимизацией дохода фирмы.

## 5. Стационарное распределение цепи.

Компьютерное моделирование цепей Маркова с дискретным временем и конечным пространством состояний. Стационарное распределение. Предельное поведение переходных вероятностей.

## 6. Метод Монте-Карло по марковским цепям.

Метод Монте-Карло по марковским цепям (алгоритм Метрополиса – Хастингса). Методы стохастической оптимизации.

## 7. Процессы рождения и гибели.

Цепи Маркова с непрерывным временем. Процессы рождения и гибели. Системы прямых и обратных дифференциальных уравнений Колмогорова.

## 8. Приложения марковских цепей в теории массового обслуживания.

Приложения марковских цепей в теории массового обслуживания. Формулы Эрланга.

## 9. Гауссовские процессы.

Гауссовские процессы. Формула Райса. Фильтр Кальмана – Бьюси.

## 10. Стационарные процессы (в узком и широком смысле).

Стационарные процессы (в узком и широком смысле). Процессы автогрегессии и скользящего среднего, их обобщения. Спектральная плотность стационарного в широком смысле процесса и ее оценивание.

## 11. Задачи прогноза случайного процесса.

Задачи регрессии и прогноза случайного процесса. Введение в теорию риска.

## 12. Мартингалы и их свойства.

Мартингалы. Марковские моменты. Теорема Дуба об остановке. Задача о разорении игрока.

13. Винеровский процесс и его свойства.

Винеровский процесс (броуновское движение) и его свойства. Теорема Башелье.

14. Элементы стохастического анализа. Формула Ито и ее применение.

Элементы стохастического анализа. Построение интеграла Ито. Формула Ито. Примеры применения. Понятие о стохастическом дифференциальном уравнении.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. В. Булинский ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. фмз.-техн. ин-т (гос. ун-т .— М. : МФТИ, 2010 .— 216 с.
  2. Вероятность [Текст] : в 2 т. Т. 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2007, 2011 .— 552 с.
- Булинский, А. В.  
Теория случайных процессов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— М. : Физматлит, 2005 .— 402 с. : ил. — (Классический университетский учебник). - Библиогр.: с. 385-393. - Алф. указ.: с. 394-402. - ISBN 5-9221-0335-0 (в пер.)) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

### Дополнительная литература

1. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин .— 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012 .— 572 с.
  2. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика [Текст] : учебник для вузов / Ю. А. Розанов .— 2-е изд., доп. — М. : Наука, 1989 .— 312 с.
- Боровков, А. А.  
Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Боровков .— Изд. стереотип. — М. : ЛИБРОКОМ, 2016 .— 656 с. - Библиогр.: с. 645-646. - Список осн. обозначений: с. 647-648. - Предм. указ.: с. 649-652. - ISBN 978-5-397-05170-5 (в пер.).

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.math.mipt.ru>  
<http://lib.mipt.ru>  
<http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.  
<http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.  
<http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».  
<http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.  
<http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях возможно использование мультимедийных технологий, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Экономика  
**профиль подготовки:** Управление инновациями в бизнесе  
Физтех-школа бизнеса высоких технологий  
кафедра высшей математики  
**курс:** 2  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчики:**

А.В. Булинский, канд. физ.-мат. наук, доцент  
В.Ю. Дубинская, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ОПК-6 Способен понимать принципы работы современных информационных технологий и использовать их для решения задач профессиональной деятельности	ОПК-6.1 Обладает необходимыми знаниями в области информационных технологий и программных средств
	ОПК-6.2 Использует методы и программные средства для сбора, обработки и анализа данных

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Случайные процессы» обучающийся должен:

### знать:

- определения, основные свойства объектов изучения теории случайных процессов, формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательств, возможные сферы приложений.

### уметь:

- решать задачи вычислительного и теоретического характера в области теории случайных процессов, устанавливать взаимосвязи между вводимыми понятиями, применять и доказывать основные

### владеть:

- разнообразным математическим аппаратом, подбирая сочетания различных методов, для описания и анализа стохастических моделей.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе выполнения студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для дифференцированного зачета:



1. Показать, что конечномерные распределения случайного процесса удовлетворяют условиям согласованности.
2. Привести пример марковского процесса и процесса, не являющегося марковским.
3. Описать модель страхования Крамера – Лундберга.
4. Привести примеры процессов с независимыми и зависимыми приращениями.
5. Будет ли гауссовским процессом сумма винеровского процесса и детерминированной функции?
6. Сформулировать теорему Башелье.
7. Привести пример, когда теорема Дуба об остановке не применима.
8. Всякое ли параметрическое семейство гауссовских величин является гауссовским процессом?
9. Объяснить идею алгоритма Метрополиса – Хастингса.
10. Сравнить ковариационные функции винеровского и пуассоновского процессов.
11. Почему постоянство функции среднего является необходимым условием мартингалности процессов с непрерывным и с дискретным временем?
12. Привести пример использования формулы Ито.

#### Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости сдачи заданий и контрольных вопросов, предусмотренных программой дисциплины.

При проведении устного опроса обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку.

Опрос обучающегося на устном опросе не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения устного опроса обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.